Correction Devoir maison n°1

Exercice 1

1. On résout l'équation pour $x > 3$

$$\begin{aligned}\ln(x-3)+\ln(x+1)=3\ln 2 &\iff \ln((x-3)(x+1))=\ln(8)\\ &\iff (x-3)(x+1)=8\\ &\iff x^2-3x+x-3=8\\ &\iff x^2-2x-11=0\end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-11) = 48$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2-\sqrt{48}}{2} & x_2 &= \frac{2+\sqrt{48}}{2}\\ x_1 &= \frac{2-4\sqrt{3}}{2} & x_2 &= \frac{2+4\sqrt{3}}{2}\\ x_1 &= 1-2\sqrt{3} & x_2 &= 1+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Or, on a $1-2\sqrt{3} < 3$ et $1+2\sqrt{3} > 3$ donc

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \{1+2\sqrt{3}\}.}$$

2. On résout l'équation $|3x+1|+|2x-4| = 5$. On commence par déterminer les cas possibles à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	

Premier cas : On suppose que $x \leq -\frac{1}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}|3x+1|+|2x-4|=5 &\iff -(3x+1)-(2x-4)=5\\ &\iff -3x-1-2x+4=5\\ &\iff -5x=2\\ &\iff x=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Or $-\frac{2}{5} = -0,4 \leq -0,33 \approx -\frac{1}{3}$. Ainsi $-\frac{2}{5}$ est une solution de cette équation

Second cas : On suppose que $-\frac{1}{3} < x \leq 2$. On a alors

$$\begin{aligned} |3x+1|+|2x-4|=5 &\iff (3x+1)-(2x-4)=5 \\ &\iff 3x+1-2x+4=5 \\ &\iff x=0 \end{aligned}$$

Or $0 \in \left[-\frac{1}{3};2\right]$. Ainsi 0 est une solution de cette équation

Second cas : On suppose que $x > 2$. On a alors

$$\begin{aligned} |3x+1|+|2x-4|=5 &\iff (3x+1)+(2x-4)=5 \\ &\iff 3x+1+2x-4=5 \\ &\iff 5x=8 \\ &\iff x=\frac{8}{5} \end{aligned}$$

Or $\frac{8}{5}$ n'appartient pas au domaine étudié donc ce n'est pas une solution de cette équation. En conclusion

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S}=\left\{-\frac{2}{5};0\right\}}$$

3. On résout l'inéquation

$$x^2-3x \leq 4 \iff x^2-3x-4 \leq 0$$

On cherche les solutions de l'équation $x^2-3x-4=0$. Le discriminant est $\Delta = 9-4\times(-4)=25$. Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{3-5}{2} \qquad x_2 = \frac{3+5}{2}$$
$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 4$$

On en déduit le tableau de signe

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de x^2-3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

A l'aide du tableau de signe on en déduit que

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } [-1;4].}$$

4. On résout l'inéquation

$$1+\frac{1}{2}x^2 \geq \ln(x) \iff 1+\frac{1}{2}x^2-\ln(x) \geq 0$$

On pose la fonction $f : x \to 1 + \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que sommes de fonctions définies et dérivables sur $]0; +\infty[$. La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, le signe de la dérivée dépend du signe de $x^2 - 1$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variation de f		$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

On a calculé $f(1) = 1 + \frac{1}{2} - \ln(1) = \frac{3}{2}$. La fonction f est donc positive.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est }]0; +\infty[.}$$

Exercice 2

Soit g la fonction définie par $g : x \to \ln(1 + x^2)$.

1. Pour déterminer son ensemble de définition, on résout l'inéquation

$$1 + x^2 > 0 \iff x \in \mathbb{R}$$

Donc le domaine de définition de la fonction g est $\boxed{D_g = \mathbb{R}}$. On a également pour tout x réel :

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\iff x^2 + 1 \geq 1 \\ &\iff \ln(x^2 + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R}.}$$

2. On calcule les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. On remarque que

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2) = \lim_{x \to -\infty} (1 + x^2) = +\infty.$$

On a donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty}$$

et de même

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty}$$

3. On remarque que R est un ensemble symétrique (i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.) Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln(1+(-x)^2) \\ &= \ln(1+x^2) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est paire.}}$

4. La fonction g est dérivable en tant que composée de fonction dérivable. On calcule alors sa dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Pour tout x réel, $1+x^2>0$. Le tableau de variations s'en déduit simplement

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation

$$\begin{aligned} g(x)=y &\Leftrightarrow \ln(1+x^2)=y \\ &\Leftrightarrow 1+x^2=e^y \\ &\Leftrightarrow x^2=e^y-1 \end{aligned}$$

Cas n°1 : Si $y>0$ alors $e^y-1>0$. Dans ce cas, l'équation a deux solutions

$$g(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad x=\sqrt{e^y-1} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{e^y-1}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont } \mathcal{S}=\left\{-\sqrt{e^y-1}, \sqrt{e^y-1}\right\}}$

Cas n°2 : Si $y=0$ alors l'équation $g(x)=y$ n'a qu'une $\boxed{\text{unique solution } x=0}$.

Cas n°3 : Si $y<0$ alors $e^y-1<0$. $\boxed{\text{L'équation } g(x)=y \text{ n'a aucune solution}}$.

6. On pose la fonction h définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x)=g(x)-x=\ln(1+x^2)-x$. On étudie la fonction h et pour cela, on calcule sa dérivée

$$\begin{aligned} h'(x)=g'(x)-1 &= \frac{2x}{1+x^2}-1 \\ &= \frac{-1+2x-x^2}{1+x^2} \\ &= -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \end{aligned}$$

La fonction h est décroissante et $h(0)=0$. On en déduit le tableau de signe de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

Deux cas sont possibles.

1° Cas : Si $x<0$ alors $g(x)-x>0$ et donc

$$\boxed{\text{la courbe représentant la fonction } g \text{ est au-dessus de la droite d'équation } y=x.}$$

2° Cas : Si $x \geq 0$ alors $g(x)-x \leq 0$ et donc

$$\boxed{\text{la courbe représentant la fonction } g \text{ est en dessous de la droite d'équation } y=x.}$$

7. La courbe de la fonction g est donnée ici :

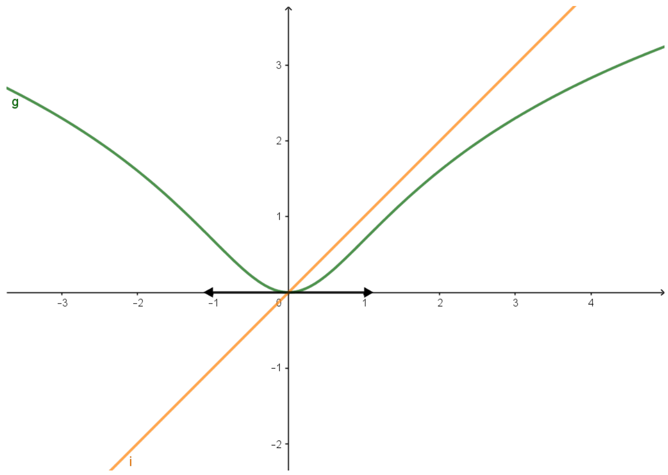


Figure 1 – La fonction g et la droite $y=x$.

Exercice 3 - ECRICOME ECT 2011

1. (a) Les fonctions $x \to e^x$ et $x \to e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$ Le domaine de définition est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x}-e^{-(-x)} \\ &= e^{-x}-e^{x} \\ &= -(e^x-e^{-x}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$ On peut en déduire que

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est symétrique par rapport à l'origine.}}$$

(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x-e^{-x}=-\infty}$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. On calcule

$$\boxed{f'(x) = e^x + e^{-x}}$$

(b) La fonction exponentielle étant toujours positive, la dérivée de f est strictement positive. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	-∞ $\nearrow$ $+\infty$

(c) On calcule

$$f(0) \quad = \quad e^0 - e^0 = 0$$

D'après le tableau de variation et le résultat précédent,

$$\boxed{f(x) > 0 \iff x \in]0; +\infty[}$$

$$\boxed{f(x) < 0 \iff x \in]-; \infty; 0[}$$

(d) On a $f'(0) = e^0 + e^0 = 2$ et $f(0) = 0$. Ainsi l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est

$$\boxed{y = 2x.}$$

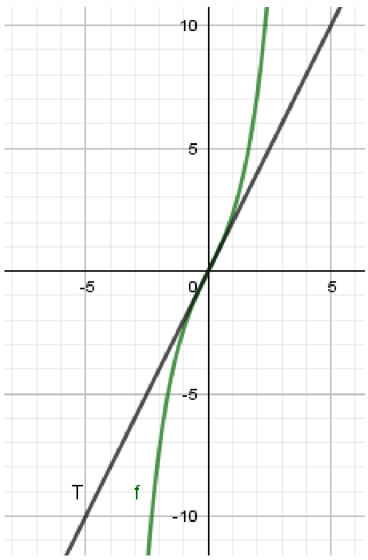
(e) On calcule la dérivée seconde de f :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x).}$$

3. (a) On en déduit le signe de f'' :

$$\boxed{f''(x) > 0 \iff x \in]0; +\infty[\text{ et } f''(x) < 0 \iff x \in]-; \infty; 0[}$$

(b) On construit la courbe représentative de f et la tangente en 0



4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution.
   — La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que somme de fonction continue sur $\mathbb{R}$)
   — La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
   — $f(0) = 0 \leq n$ et $f(\ln(n+1)) = n + 1 - \dfrac{1}{n+1} > n$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaire, on en conclut que

   $$\boxed{\text{L'équation } f(x) = n \text{ a une unique solution.}}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule le discriminant de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$.

   $$\Delta = (-n)^2 - 4 \times (-1) = n^2 + 4 > 0$$

   L'équation a donc deux solutions réelles données par

   $$\boxed{x_1 = \frac{n - \sqrt{n^2+4}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}}$$

   On a évidemment x_2 positif (somme de termes positifs). L'étude est moins clair pour x_1. On a

   $$\begin{aligned} n^2 + 4 > n^2 &\implies \sqrt{n^2+4} > n \\ &\implies 0 > n - \sqrt{n^2+4} \\ &\implies 0 > x_1 \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{On a } x_1 \text{ négatif et } x_2 \text{ positif.}}$$

   (c) On utilise le changement de variable $t = e^x$. On a alors

   $$\begin{aligned} e^x - e^{-x} = n &\iff e^x - \frac{1}{e^x} = n \\ &\implies t - \frac{1}{t} = n \\ &\implies t^2 - 1 = nt \\ &\implies t^2 - nt - 1 = 0 \end{aligned}$$

D'après les résultats de la question précédente, on a $t = x_1$ ou $t = x_2$, c'est à dire, $e^x = x_1$ ou $e^x = x_2$. Or, $e^x = x_1$ est impossible car x_1 est négatif.

$$\boxed{\text{L'équation n'a donc qu'une solution : } \mathcal{S} = \left\{ \ln\left(\frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2} \right) \right\}.}$$